Colle du 4 novembre : Suites et séries de fonctions, séries entières

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

5.1 Questions de cours

Question de cours 1 : Théorème de dérivation des séries de fonctions.

Question de cours 2 : Régularité des séries entières.

Question de cours 3 : Théorème d'intégration d'une série de fonctions.

5.2 Séries entières

Exercice 1 : Quel est le rayon de convergence de $\sum e^{n \sin n} z^n$?

Exercice 2 : Soit (a_n) la suite réelle définie par $a_0 = 1$ et $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$. Calculer a_n en fonction de n.

Exercice 3 : Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 4 : Soient D le disque unité ouvert et (a_n) une suite complexe. Supposons que $\sum n a_n$ converge absolument.
1. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
2. Pour $z \in D$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et on suppose que $a_1 \neq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective.

Exercice 5 : Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 6 : Pour chaque entier naturel n, calculer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + y + 2z = n$. On utilisera les séries entières.

Exercice 7 : Calculer $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1-x} dx$.

Exercice 8 : Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{C_{2n}^n}$. On montrera que $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{C_{2n}^n}$ vérifie l'équation différentielle $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.

Exercice 9 : Développer en série entière $f(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt$.

Exercice 10 : Étudier le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ lorsque $a_n = \frac{(2n)! n^{2n}}{2^n n! (3n)!}$, lorsque $a_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ et lorsque $a_n = 0$ si n n'est pas un carré et $a_n = (\sqrt{n})!$ si n est un carré.